TD

S.V. et S.T.U.

MECANIQUE - T.D.1

1/ Une moto parcourt 30 kilomètres de ligne droite en 50 minutes. Que vaut la vitesse moyenne exprimée en m/s?

2/ Un athlète parcourt 100 m en 8 s et 13 centièmes. Que vaut sa vitesse moyenne exprimée en Km/h?

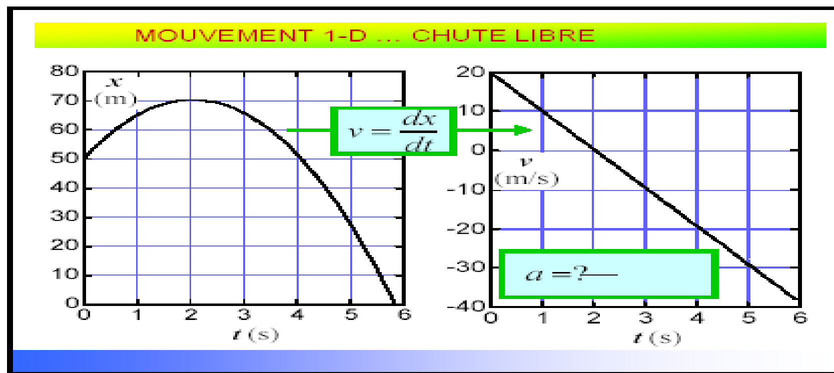
3/ Un escargot parcourt 1 mm en 10 s. que vaut sa vitesse moyenne en Km/h ?

4/ X et Y quittent leurs maisons au même moment et roulent en sens opposé. X a une vitesse de 30 Km/h alors que Y a une vitesse deux fois plus grande.
Quelle est la distance entre leurs maisons sachant qu'ils se croisent après 10 min ?

5/ Une voiture est sur le point d'en dépasser une autre. Sa vitesse augmente de 50 à 100 Km/h en 4 s. Que vaut l'accélération moyenne en m/s^2?

6/ Une voiture, qui a une vitesse initiale de 20 m/s freine avec une décélération de 3 m/s^2. Quel temps lui faudra-t-elle pour s'arrêter?

7/ A partir des figures ci-dessous, déterminer l'équation horaire du mouvement x(t).



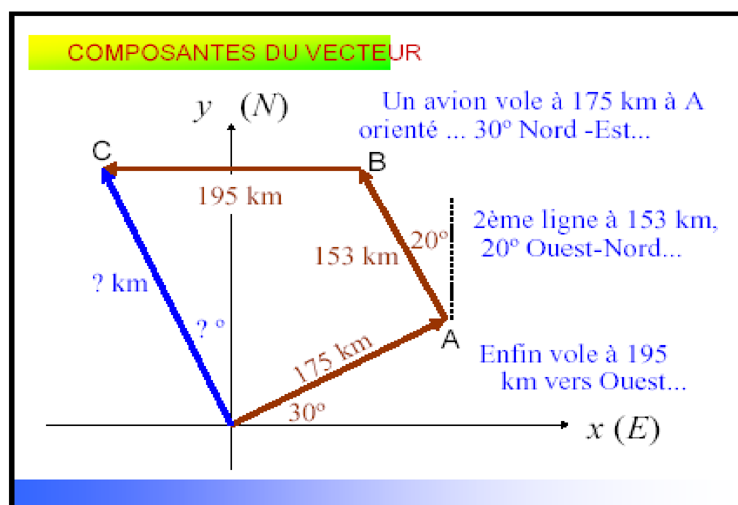
8/ Quelle doit être la hauteur d'une chute d'eau d'un barrage pour que l'eau atteigne la roue d'une turbine avec une vitesse verticale de 40 m/s?

9/ Pourquoi les voitures de course de formule 1 sont pilotées manuellement ?

10/ Lorsqu'un automobiliste repère un obstacle, un certains temps de réaction τ s'écoule avant qu'il commence à freiner avec une décélération a que l'on suppose constante.
Quels sont le temps de réaction et la décélération que l'on déduit de la loi empirique :
Distance de freinage $d_f = \frac{1}{3}V_0 + \frac{1}{50}V_0^2$ où V_0 est la vitesse de la voiture juste avant le freinage (d_f en m et V_0 en km/h)

11/ Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque et β l'angle compris entre les côtés a et b, montrer que le théorème de Pythagore généralisé est donné par : $a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2$

12/ Déterminer le module et la direction du vecteur $\vec{OC}$?



13/ On appelle cycloïde la courbe décrite par un point invariablement lié au cercle mobile (appelé cercle générateur) qui roule sans glisser sur une droite (appelée directrice).
Les équations horaires du mouvement cycloïde sont données par :

$$x(t) = a\,(t - \sin t)$$
$$y(t) = a\,(1 - \cos t)$$

Exprimer la vitesse et l'accélération d'un objet décrivant une cycloïde?

14/ Les écrans des tubes cathodiques (des téléviseurs, des ordinateurs, des oscilloscopes….) émettent de la lumière lorsqu'ils sont atteints par des électrons ayant une grande vitesse. On utilise des plaques chargées électriquement pour contrôler leur point d'impact.
Des électrons ayant une vitesse initiale horizontale de $2\ 10^7\ ms^{-1}$ sont soumis à une accélération verticale de $10^{14}\ ms^{-2}$ pendant leur trajet entre des plaques qui ont une longueur de 0.2 m.

a- Pendant combien de temps les électrons restent-ils entre les plaques ?
b- Quelle sera la direction des électrons à la sortie de celles-ci ?
c- Que vaudra la déviation verticale à la sortie des plaques ?

15/ Une particule 1 bouge le long de l'axe OX avec la vitesse $\vec{V}_1 = 2\,\vec{i}$ et une autre 2 le long de l'axe OY à la vitesse $\vec{V}_2 = 3\,\vec{j}$. Les deux vitesses sont en cm/s. A l'instant t=0, leurs coordonnées sont respectivement $\vec{r}_1(0) = (-3cm, 0)$ et $\vec{r}_2(0) = (0, -3cm)$

a- Déterminer le vecteur $\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$ représentant la position relative des deux particules.
b- Où et quand les 2 particules se trouveront-elles à une distance minimale l'une de l'autre ?

MECANIQUE - T.D.2

1/ Le noyau d'un atome d'Uranium peut être approximativement décrit par une sphère dont le rayon vaut 8,7 10^{-15} m et dont la masse vaut 3.5 10^{-25} Kg
Quelle est sa masse volumique ainsi que sa densité ?

2/ Un ascenseur a une masse de 1000 kg.

a- Il a une accélération en montée de 3 m/s^2. Que vaut la tension T exercée par le câble ?

b- Que vaut la tension T si l'accélération est de 3 m/s^2 en descente ?

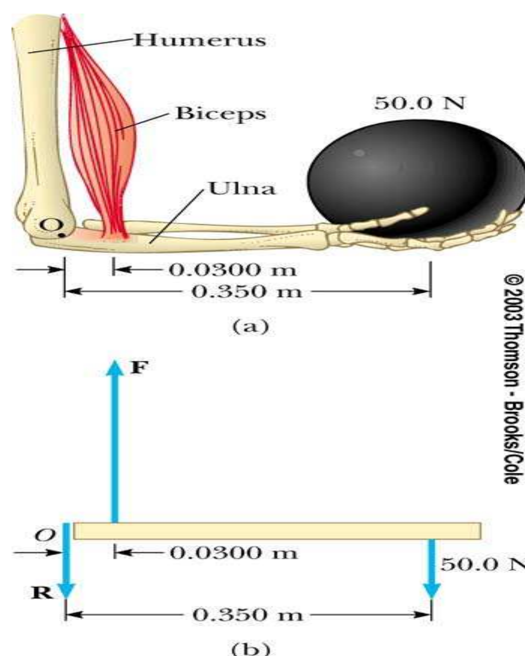
3/ Un avion de chasse pique, à la verticale avec une accélération de 3g.
Quelles sont la grandeur et la direction du poids effectif du pilote si son poids est P ?

4/ Un parachutiste dont le poids est P, touche le sol les jambes fléchies. Il s'immobilise en subissant une décélération de 3g.
Trouver la force exercée par le sol sur le pilote au cours de l'atterrissage ? Discuter

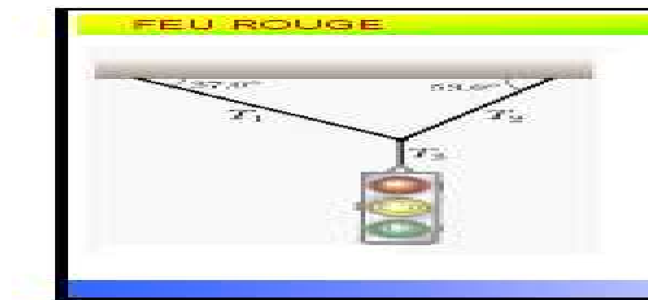
5/ Un bloc de 5 kg se trouve sur une surface plane horizontale. Si une force horizontale T=20 N est appliquée au bloc et si celui-ci reste immobile, que vaut la force de frottement ?
Le bloc se met en mouvement lorsque T atteint une valeur de 40 N. Que vaut μ_s ?
Le bloc continu de se déplacer à vitesse constante si T est ramenée à 32 N. Que vaut μ_c?

6/ La lune se trouve à 3.9 10^5 Km du centre de la terre. Sa masse est de 7.3 10^{22} Kg et la masse de la terre vaut 6.0 10^{24} Kg. A quelle distance du centre de la terre doit se trouver un objet pour que les forces gravitationnelles dues à la terre et à la lune soient égales mais opposées.

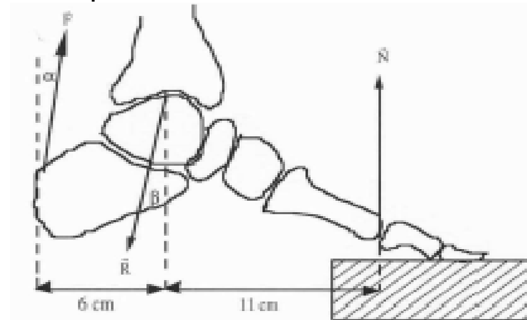
7/ La figure ci-dessous représente un avant-bras, sous la forme d'un modèle constitué d'une barre articulée autour d'un pivot et soutenue par un câble. Trouver la tension F exercée par le biceps et la force R exercée par l'articulation du coude.



8/ Déterminer T_1, T_2 et T_3 sachant que le poids du feu rouge est de 125 N.
Les angles entre l'horizontal et les tensions T_1 et T_2 sont respectivement 37° et 53°.



9/ Lorsqu'on est debout sur la pointe d'un seul pieds, la configuration des forces agissant sue le pieds est schématisée sur la figure ci-dessous.
La force F est exercée par le tendon d'Achille, R est la réaction du tibia et N est la réaction du sol.
Déterminer les équations d'équilibre ?



10/ Une feuille d'or a une épaisseur de 10 mm. Que vaut la masse d'une surface de 10 cm de côté sachant que la densité de l'or vaut 19.3 ?

11/ Imaginons que les globules rouges soient de petites sphères de rayon R =2 μm et de masse volumique ρ = 1300 Kg/m^3.
Quelle est la masse d'un globule rouge ?

12/ Un fémur humain se fracture si la force de compression vaut 210^5 N. Une personne, dont la masse est de 60 kg, la reçoit sur une jambe.

a- Quelle accélération produira une fracture ?
b- Que vaut cette accélération par rapport à l'accélération de la pesanteur ?

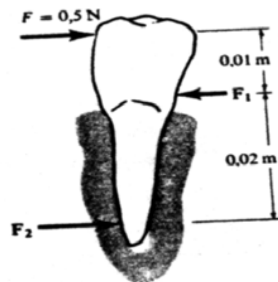
13/ Un bloc de masse m_1 = 20 kg est libre de se mouvoir le long d'une surface horizontale. Une corde qui passe dans la gorge d'une poulie le relie à un second bloc de masse m_2 = 10 kg. Ce bloc est en suspension verticale. Supposons, pour simplifier, que la poulie et la corde ont des masses négligeables. Dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottements, déterminer :

a- les forces qui s'exercent sur les blocs ;
b- leurs accélérations.
c- Si le système est au repos à l'instant initial, quelle distance aura-t-il parcourue après 2 s ?

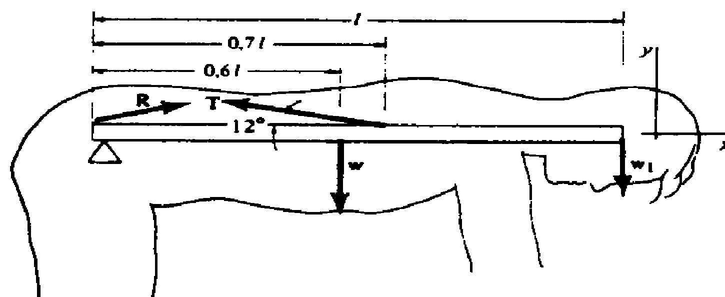
14/ Un bloc est au repos sur un plan incliné. Le coefficient de frottement statique vaut μ_s. Quel est l'angle d'inclinaison maximum θ_{max} du plan incliné pour lequel le bloc reste au repos ?

15/ Une boîte, pesant 100 N, est au repos sur un sol horizontal. Le coefficient de frottement statique vaut 0.3. Quelle est la force minimum nécessaire pour mettre la boîte en mouvement ?

16/ Trouver les forces F_1 et F_2 qui s'exercent sur la dent représentée par la figure ci- dessous. (En orthodontie, les forces appliquées aux dents donnent naissance à des forces sur les os de la mâchoire. Progressivement, le tissu osseux se modifie, ce qui permet à la dent de pivoter ou de se déplacer. De nouveaux tissus osseux se régénèrent dans l'espace crée. Les forces doivent être suffisamment faibles pour éviter d'endommager la racine de la dent.)



17/ La colonne vertébrale humaine comprend 24 vertèbres séparées par des disques qui contiennent un liquide (LCR). Lorsqu'on se penche pour ramasser un objet, une force très importante apparaît sur le disque lombo-sacré qui sépare la dernière vertèbre de l'os qui supporte la colonne vertébrale (le sacrum).
Si on assimile la colonne vertébrale à une barre qui tourne autour d'un pivot comme le montre la figure ci-dessous, on peut dire que :
Le sacrum exerce une force R sur la colonne vertébrale. Les différents muscles du dos sont équivalents à un seul muscle produisant une tension T.
A l'aide des données de la figure, évaluer T et R. W=430 N étant le poids du torse et des bras.
Discuter les cas W_1=0 et W_1=175 N



MECANIQUE - T.D.3

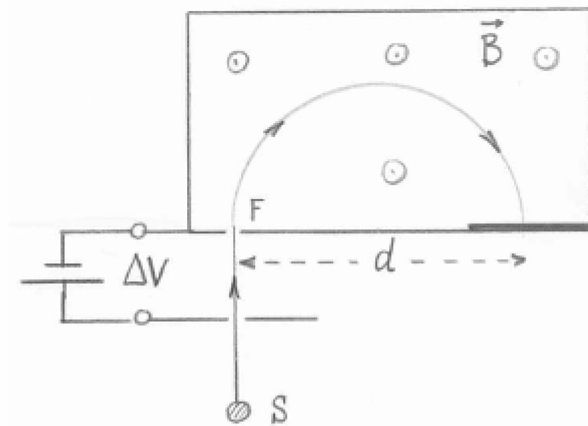
1/ La vitesse maximale des lames d'une tondeuse à gazon ne peut pas dépasser une valeur limite. Cette limite a pour but de réduire les dangers dus aux projections de pierres et autres débris. Un modèle de tondeuse disponible sur le marché a une

vitesse de rotation de 3700 tours par minute. La lame a un rayon de 0.25 m.
a-Quelle est la vitesse linéaire de l'extrémité de la lame ?
b- Si la lame s'arrête en trois secondes avec une décélération constante, évaluer le nombre de tours qu'elle effectue au cours de cette décélération.

2/ Dans un modèle simple de l'atome d'hydrogène, on considère que l'électron se déplace autour du proton sur une orbite circulaire de rayon 5.29×10^{-11} m. La masse du proton vaut $M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg et celle de l'électron $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg.
a- Que valent les forces électriques et gravitationnelle exercées par le proton sur l'électron ? Conclure.
b- Déterminer l'accélération et la vitesse de l'électron dans l'atome d'hydrogène ainsi que le nombre de révolutions effectuées par seconde.

3/ Imaginons que les globules rouges soient de petites sphères de rayon R =2 μm et de masse volumique ρ = 1300 g/$\mathbf{l}$.
Comparer leur poids à la force centrifuge que produit une centrifugeuse de vitesse de rotation égale à 10^4 tours/min et de rayon 10 cm ? Conclure

4/ La figure ci-dessous montre schématiquement un spectromètre de masse. La source S produit des ions positifs de charge +2e (+ e est la charge du proton = $1.602\ 10^{-19}$ C) et de masse inconnue M. Les ions sont accélérés par une tension électrique pour atteindre une vitesse $V=3.1\ 10^5$ m/s. Après le passage de la fente F, ils sont soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ de 0.1 T. ($\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de la figure). Dans $\vec{B}$ ils décrivent une trajectoire semi-circulaire et sont enregistrés sur un écran à une distance d = 13 cm de A.
Quelle est la masse M des ions ?
De quel ion s'agit-il ? On rappelle que la masse d'un proton est égale à $M_p= 1.67\ 10^{-27}$ Kg



5/ Soit un satellite de masse m en orbite autour de la terre (de masse M_T)
r étant le rayon de l'orbite circulaire.
a/ A partir de la 2ème loi de Newton, déterminer l'accélération du satellite.
b/ Déterminer la vitesse du satellite.
c/ Montrer qu'on a : $T^2 = C\,r^3$ appelée 3ème loi de Kepler
C est une constante qu'on déterminera.
d/ Quelle doit-être l'altitude h, par rapport à la surface terrestre, pour que le satellite ait une période de 24 h. Commenter
Données numériques: $M_T = 6\ 10^{24}$ Kg, R = 6400 km, m = 1000 Kg,
$G = 6{,}7\ 10^{-11}$ S.I.,

6/ Déterminer la vitesse V et la vitesse angulaire ω qu'un avion qui vole à l'équateur à une hauteur de 5000 m doit avoir pour voir le soleil fixe à l'horizon. L'avion doit voler vers l'est où vers l'ouest?

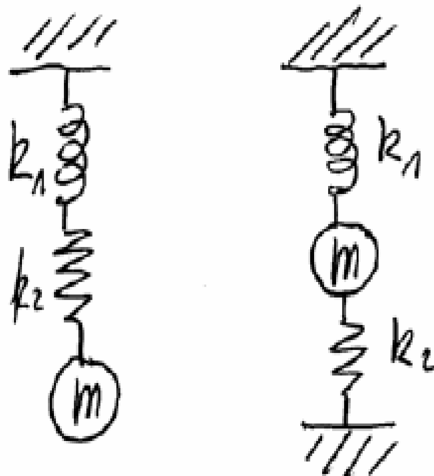
7/ Vous faites tourner (avec une vitesse uniforme) une pierre attachée à l'extrémité d'une corde de longueur R égale à 1.2 m dans un plan horizontal situé à une hauteur h égale à 1.8 m du sol. La corde casse et la pierre touche le sol à une distance L égale à 9.1 m de vos pieds.
Quelle est la valeur de l'accélération centripète a_c pendant le mouvement circulaire de la pierre?

8/ Déterminer l'équation du mouvement d'une masse m accrochée à un ressort horizontal.
A t = 0 , on écarte la masse de sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale.

9/ Résoudre l'équation différentielle du mouvement oscillatoire amorti.
Discuter le résultat obtenu selon l'importance du coefficient d'amortissement.

10/ Une particule pénètre avec une vitesse V_0 dans un milieu visqueux caractérisé par un coefficient de frottement β. Si m est la masse de la particule, que vaut la distance de pénétration L dans ce milieu.
A.N.: V_0= 10 m/s, m= 1 g et β= 200 g/s

11/ Déterminer en négligeant le frottement :
a- L'élongation à l'équilibre
b- La fréquence propre d'oscillation des deux oscillateurs ci-contre.



12/ Imaginer un tunnel traversant complètement la terre le long d'un diamètre. A une extrémité du tunnel, on lâche une masse m avec une vitesse nulle.
a- Ecrire l'équation du mouvement de m et montrer que son mouvement est une oscillation harmonique.
b- Que vaut la période T du mouvement ?

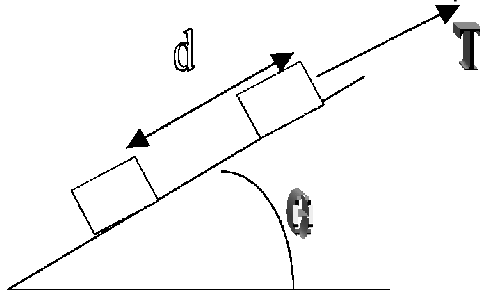
13/ Une molécule diatomique peut être envisagée comme un système de deux masses m_1 et m_2 interagissant par l'intermédiaire d'un ressort de constante élastique K.
a- Montrer que la fréquence propre d'oscillation de la molécule est donnée par :

$\upsilon_0 = \frac{1}{\ } \sqrt{\frac{k}{\ }}$ $\qquad \frac{m_1 m_2}{\ }$

2π

MECANIQUE - T.D.4

1/ Un objet de masse m est en mouvement ascendant sur une pente. Le frottement est supposé négligeable et la tension **T** qui tire l'objet est représentée sur la figure ci-dessous.
Qu'est ce qu'on peut conclure au sujet du travail de la force gravitationnelle exercée par la terre sur l'objet.
Déterminer le travail total de m durant le déplacement d.



2/ Une personne qui veut maigrir soulève 10^3 fois une masse de 10 kg d'un hauteur de 50 cm.
a- Quel travail effectue-t- elle pour vaincre la force de pesanteur ?
(Lorsqu'elle abaisse la masse, on supposera que l'énergie potentielle est dissipée)
b- la graisse fournit une énergie de 3.8 10^6 J par kg. Cette énergie est convertie en énergie mécanique avec un rendement de 20 %. Quelle quantité de graisse sera brûlée au cours de l'exercice ?

3/ Déterminer l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique unidimensionnel.
Sachant que la solution de l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique est donnée par : $x(t) = A \sin(\omega t+\varphi)$,
En déduire l'expression de l'énergie mécanique.

4/ Soit un électron en mouvement circulaire autour d'un proton.
a- Donner l'expression de l'énergie cinétique.
b- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle.
c- En déduire l'expression de l'énergie mécanique.

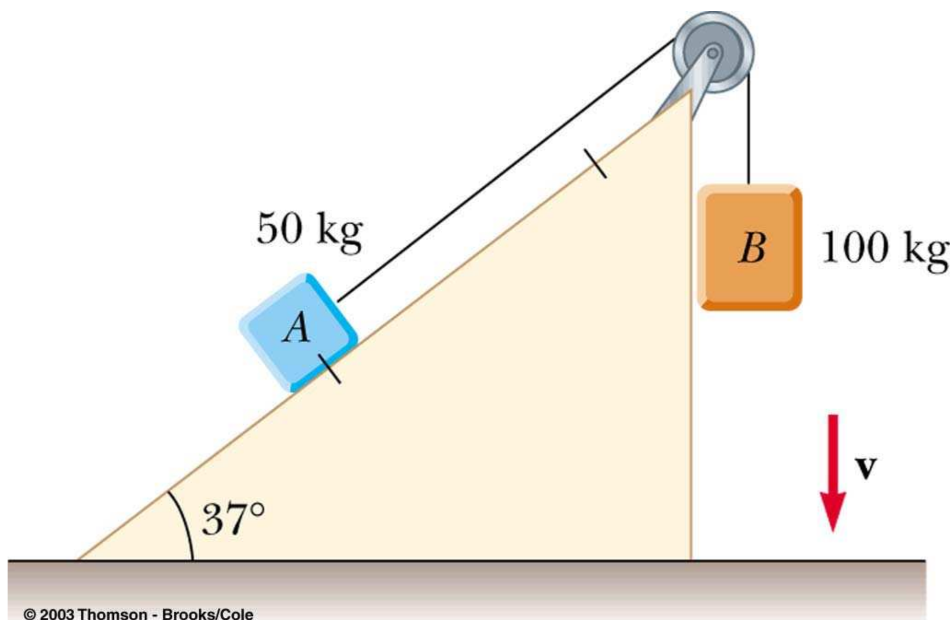
5/ Les pales d'une éolienne balaient une surface circulaire S.
a- Si le vent a une vitesse V et une direction perpendiculaire à la surface balayée par les pales, quelle est la masse d'air qui passe à travers l'éolienne au cours du temps ?
b- Quelle est l'énergie cinétique de l'air ?
c- Supposons que l'éolienne transforme 30 % de l'énergie éolienne en énergie électrique. Calculer la puissance électrique produite ?
On donne : la masse volumique de l'air ρ = 1.2 kg/m^3, S = 30 m^2 et V = 36 Km/h.

6/ Une skieuse, de masse 50 Kg, descend le long d'une colline sans vitesse initiale. La hauteur de la colline est de 20 m.
a- Quelle sera sa vitesse en bas de la colline si on néglige les forces de frottements ?
b- Cette fois les forces de frottements ne sont pas négligeables et la vitesse en bas de la pente est de 10 m/s. Quel a été le travail des forces de frottements ?
c- Après la colline, elle aborde un terrain plat. Elle fait pivoter ses skis et s'immobilise rapidement. Si le coefficient de frottement cinétique μ_c est de 2.5, déterminer la distance au bout de laquelle elle s'arrêtera ?

7/ Dans une salle de sport, une personne soulève un poids pour brûler la graisse. La graisse fournit une énergie de $3.8\ 10^7$ J/kg et cette énergie est convertie en énergie mécanique avec un rendement de 20 %.
Sachant que la personne a mangé un tajine avec 35 g de graisse, combien de fois elle doit soulever une masse de 10 kg d'une hauteur de 50 cm pour éliminer toute la graisse consommée ?

8/ Les objets en rotation possèdent aussi une énergie cinétique.
Déterminer le travail et la puissance d'une roue, de rayon r, en rotation autour de son axe Δ.
Application : Un seau de 20Kg est maintenu au-dessus d'un puits par une corde de masse supposée négligeable et enroulée autour d'un cylindre de 0,2 m de rayon. Son moment d'inertie vaut 0.2 Kg m^2.
Si le sceau part du repos, quelle vitesse aura t-il au moment d'atteindre l'eau 10 m plus bas.

9/ Deux blocs A et B (m_A= 50 Kg et m_B= 100 Kg) sont relies comme le montre la figure ci-dessous. Si les 2 blocs sont initialement au repos, quelles sont leurs vitesses quand A aura parcouru une distance de 25 cm ?
Tous les frottements sont supposés nuls.



10/ Un bloc A de masse m= 0.5 Kg est au repos. Il est comprimé de 2 cm par rapport à l'équilibre puis lâché.

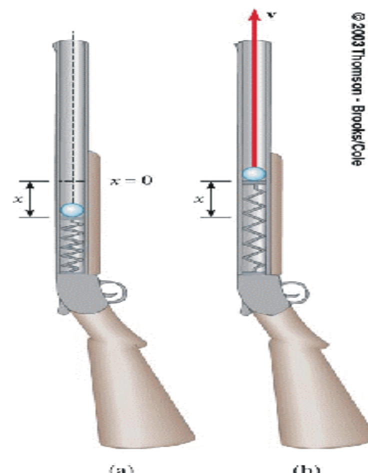
a- Calculer sa vitesse au point B

b- Calculer la distance d maximale parcourue sur le plan incliné dans le cas où θ= 25°.

11/ Un fusil tire une balle en liège de masse 20 g sur une hauteur de 40 m et son ressort est comprimé de 1.5 cm.

a- Quelle est la raideur du ressort?

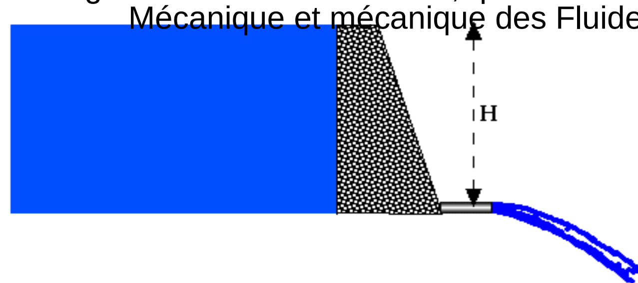
b- Quelle est l'accélération maximale de la balle?



12/ Un ascenseur a une masse de 550 kg et un contrepoids de 700 kg soulève 23 étudiants de 80-kg chacun de 30 mètres pendant 12 s.

Quelle est la puissance requise? (en W et hp)

13/ A partir d'un barrage, on veut produire une puissance de 50 MW. Sachant que le barrage a une hauteur de 75 m, quel et le débit d'eau (en m^3/s) nécessaire ?



μ Où $\mu = m_1$

$+ m_2$

est la masse réduite de la molécule.

MECANIQUE - T.D.6

I- le débit de l'eau dans un tuyau d'un rayon de 2 cm vaut 0.01 m^3/s à 20 ℃.
a- Quelle est la vitesse moyenne de l'eau?
b- Quelle est la nature de l'écoulement? η (eau à 20℃) = 0.6947 10^{-3} Pa.s

II- Considérons l'écoulement du sang à 37 ℃ dans une a rtère de 2 mm de rayon.
Jusqu'à quelle vitesse moyenne du sang l'écoulement reste-t-il laminaire?
Quel est le débit Q correspondant? η(37 ℃)= 2.084 10^{-3} Pa.s.

III- Le rayon intérieur d'une grosse artère d'un chien est de 4 mm.
Le débit du sang à travers l'artère est de 1 cm^3/s.
a- Calculer les vitesses moyenne et maximale du sang?
b- Calculer la chute de pression le long de l'artère sur une longueur de 10 cm.
La viscosité du sang η à 37 ℃ est égale à 2.084 10^{-3} Pa.s.
c- Quelle est la puissance requise pour entraîner l'écoulement sanguin dans l'artère?
Commenter le résultat obtenu sachant que le métabolisme d'un chien est supérieur ou égal à 10 W.

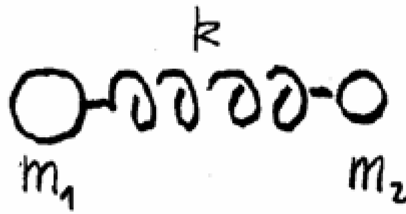
IV/ Une boule de Bowling en acier et de rayon 10 cm tombe d'un air bus.
a- Quelle est sa vitesse limite?
b- Quand elle dépassera la vitesse du son?
On donne: ρ_{acier}=7.85 10^3 Kg/m^3, ρ_{air}=1.20 Kg/m^3 ,η_{air}= 1.73 10^{-5} Pa.s

V- L'artère pulmonaire, qui connecte le cœur aux poumons a une longueur de 85 mm et présente une chute de pression sur cette longueur de 450 Pa. Si le rayon interne de cette artère vaut 2.4 mm,
Calculer la vitesse moyenne du sang dans cette artère?

~~**VI-** Le rayon de l'artère aorte d'un adulte moyen est de 13 mm.~~
Sachant que le débit sanguin est de 100 cm^3/s,
Calculer la résistance à l'écoulement et la perte de charge sur une distance de 20 cm.
On supposera l'écoulement laminaire.

VII- Pour une personne au repos, les conditions physiologiques dans l'artère pulmonaire sont à peu près : Le rayon intérieur de l'artère est de 2,4 mm. La vitesse moyenne v du sang est de 1,4 m/s. La viscosité du sang η à 37 ℃ est égale à 2,084 10^{-3} Pa.s et la masse volumique du sang est de 1060 kg/m^3.-
1- Calculer Le débit du sang à travers cette artère.
2- Calculer le nombre de Reynolds ? En déduire la nature de l'écoulement
3- Calculer la perte de charge le long de l'artère sur une longueur de 85 mm ?

Mécaniq
ue et
mécaniq
ue des
fluides
S
VI-STU



14/ La fréquence propre d'oscillation de deux oscillateurs harmoniques identiques de
masse m= 0.2 Kg vaut υ_0 = 2 Hz. En couplant les deux oscillateurs avec un ressort de constante k' on observe un battement de période T_B= 10 s.
a- Que vaut k' ?
b- Si on réduit la masse m d'un facteur 2, comment faut-il choisir k' pour que T_B ne change pas ?

Correction des TD

Corrigé de la série n°1
Cinématique
Mouvements unidimensionnel et bidimensionnel

1/ $V_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ **A.N. :** $V_{moy} =$ 10 m/s

2/ $V_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ **A.N. :** $V_{moy} =$ 44.3 Km/h

3/ $V_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ **A.N. :** $V_{moy} =$ 0.36 Km/h

4/ Soit l'origine du repère confondu avec la maison de monsieur X par exemple.
A l'instant t = 10 min, X et Y se rencontrent et leurs abscisses seront identiques.
L'équation du mouvement de X est : $x_1(t)= V_1\, t$
L'équation du mouvement de Y est : $x_2(t)= -V_2\, t + x_0$
$x_1(t=10\ min)= x_2(t=10\ min) \Leftrightarrow x_0= (V_1+ V_2)t$
A.N. : x_0= 15 Km

5/ $a_{moy} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ **A.N. :**

$a_{moy} = 3.47 \text{ m/s}^2$

6/ L'équation du mouvement est V= a t +V_0 = -3 t + 20

V=0 $\Leftrightarrow$ t=$\frac{20}{3}$ s

7/ La pente de la courbe V(t) est a= -10 m/s^2 : le mouvement est rectiligne uniformément retardé.
Les conditions initiales sont : V_0 = 20 m/s et x_0 = 50 m
D'où : x(t)= -5 t^2 + 20 t + 50

8/ On utilisera la formule V^2-V_0^2 = 2a Δx = 2a h

On a: V_0=0, a= 9.8 m/s^2 et V= 40 m/s D'où h= 81.63 m

9/ Les voitures de formule 1 sont pilotés manuellement car le temps d'actionner le freinage est plus court comparativement à celui réalisé avec les pieds. En effet, la distance parcourue par l'influx nerveux, à partir du cerveau, jusqu'aux mains est plus faible par rapport à la distance aux pieds.

10/ On a d_f= $1.2V_0 + 0.26V_0^2$ (1) où d_f en m et V_0 en m/s.

La distance de freinage est donnée par : d_f= $V_0\tau + V_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ (2)

Où τ et a sont le temps de réaction et la décélération.

Aussi on a : $\frac{d}{dt}(d_f) = V_0 - a t$

Après avoir parcouru la distance d_f, le véhicule s'arrête : $V = 0 \Leftrightarrow V_0 = at$

Les équations (1) et (2) deviennent alors :

$d_f = 1.2\,at + 0.26\,(at)^2$ (3)

$d_f = a\tau\, t + \frac{1}{2} a\, t^2$ (4)

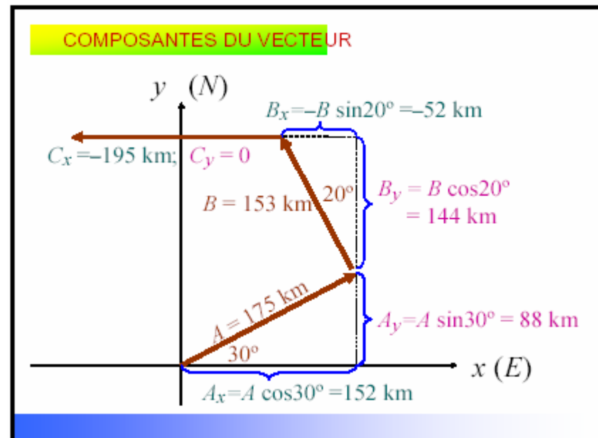
Par comparaison de (3) et (4), on obtient : $\tau = 1.2$ s et $a = 1.93$ m/s^2

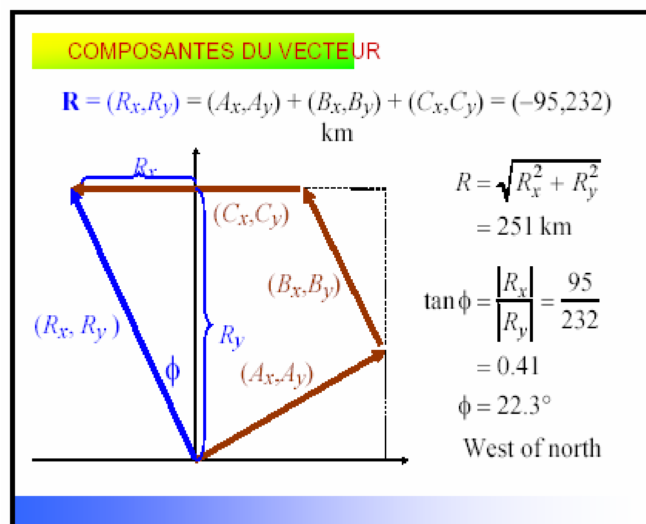
11/ $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

Elevons au carré : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ où β est l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Si $\beta = \frac{\pi}{2}$: $c^2 = a^2 + b^2$: C'est le théorème de Pythagore.

12/





13/ $\vec{V} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} = a(1-\cos t)\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$ et $\|\vec{V}\| = 2a\,\sin\frac{t}{2}$

$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} = b(\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j})$ et $\|\vec{a}\| = b$

14/
Soit OXY un repère orthonormé avec OY un axe ascendant.
$\vec{a} = a\,\vec{j}$ et $\vec{V_0} = V_0\,\vec{i}$
Par intégration et en tenant compte de conditions initiales (à t=0 s : x_0=0 et y_0=0, $V_{0x} = V_0$ et V_{0y}=0) on obtient :

$$y = \frac{1}{2}a\,t^2 \text{ et } x = V_0\,t$$

a- les électrons restent entre les plaques jusqu'à x =0.2 m durant le temps $\frac{x}{V_0} = t$

A.N. : $t = 10$ ns

b- A cet instant, la composante V_y de la vitesse sera égale à $V_y = a\,t$
A.N. : $V_y = 10^6$ m/s

A la sortie de la plaque, on aura un angle θ entre V et V_x, $tg\theta = \frac{V_y}{V_x}$

A.N. : θ = 2.86 °: C'est l'angle entre le vecteur vitesse e t l'axe des x.

c- La déviation verticale est donnée par l'ordonnée y à la sortie des plaques :
$y_D = \frac{1}{2}a\,t^2$ **A.N. :** $y_D = \frac{1}{2}10^{14}\,(10^{-8})^2$= 5 mm.

15/ $\vec{V_1} = 2\,\vec{i}$ et $\vec{V_2} = 3\,\vec{j}$
a- On remarque que les deux vecteurs sont perpendiculaires. On a :
$\vec{V_1} = \frac{d}{dt}\vec{r}_1 = \frac{dx_1}{dt}\vec{i} = 2\,\vec{i}$ d'où : $\vec{r}_1(t) = (2t-3)\,\vec{i}$

De même, on obtient : $\vec{r}_2(t) = (3t-3)\,\vec{j}$

Par conséquent $\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = -(2t-3)\,\vec{i} + (3t-3)\,\vec{j}$
b- La distance séparant les deux particules et donnée par :
$r_{12} = \sqrt{(-2t+3)^2 + (3t-3)^2} = \sqrt{13t^2 - 30t + 18}$

r_{12} est minimum quand $\frac{dr_{12}}{dt} = 0$: $26t - 30 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15}{13}$ s

r_{12} —

Corrigé de la série n°2
Dynamique et Statique

1/ le volume de la sphère est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ et $\rho = \frac{m}{V}$ **A.N** : ρ = 1,27 10^{17} Kg/m^3

La densité est $d = \frac{\rho_U}{\rho_{eau}}$ **A.N** : d = 1,27 10^{14}

2) Les forces qui s'exercent sur l'ascenseur sont : le Poids $\vec{P}$ et la Tension du câble $\vec{T}$.

a) En montée, l'accélération est ascendante (vers le haut). Par application de la 2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique), on obtient :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

La trajectoire est une droite verticale : c'est donc un mouvement rectiligne.
Projetons la relation vectorielle ci-dessus suivant un axe OX ascendant (dirigé vers le haut) :

$$-mg + T = ma \Leftrightarrow T = m(a+g)$$

A.N.: T = 1000 x (3+9.8) = 12800 N
On voit que T est bien supérieure au poids. Le câble doit supporter le poids de l'ascenseur, mais il doit aussi fournir une force supplémentaire nécessaire à l'accélération.

b) Dans ce cas (la descente) :

$$T - mg = -ma \Leftrightarrow T = m(-a+g)$$

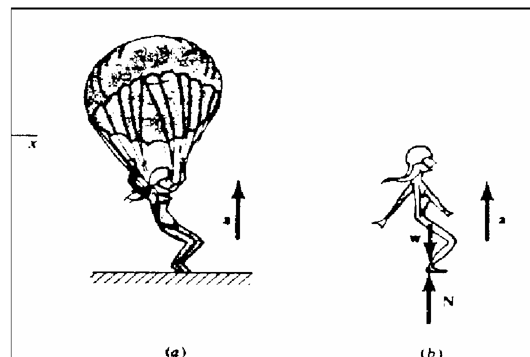
A.N.:T= 1000 x (9.8 - 3) = 6800 N < P.

3/ P_{eff} = ma –mg avec a = 3g d'où P_{eff} = 2 mg et $\vec{P}_{eff}$ est dirigé vers le haut.

4/ Le principe fondamental de la dynamique nous donne :

$$-P + N = ma = m\,3g \Leftrightarrow N = 4\,mg$$

La force exercée par le sol sur le parachutiste est 4 fois son poids. Par contre si la personne est simplement debout sur le sol, N est égale à P.
Si le parachutiste garde les jambes tendues au cours de l'atterrissage, il s'immobilisera avec une plus grande décélération sur une distance plus courte. La force qui s'exercera sur ses jambes sera donc plus importante (risque de fracture).



5/ i) Puisque le bloc reste fixe lorsque T est appliquée, la force de frottement f_S doit être égale et opposée à T : $f_S = T$ **A.N.** : $f_S = 20$ N

ii) Comme le bloc commence à glisser lorsque T = 40 N, la force de frottement maximale $f_{S,max}$ doit être égale 40 N.

La somme des forces verticales est nulle : n – mg = 0.

Or $f_{S,max} = \mu_S n = \mu_S mg$ **A.N.**: $\mu_S = 0,82$

iii) Puisque le bloc se déplace à vitesse constante sous T = 32 N, la force résultante est nulle :

$f_C = \mu_C n = \mu_C mg$ **A.N.**: $\mu_C = 0,65 < \mu_S$

6/ Soient O' le centre de la lune et o le centre d la terre : OO' = 3,9 10^5 Km.

La masse m est à r_L = O'm de la lune et à r_T = Om. On a $r_L + r_T$ = r = OO'

Par rapport à la terre, le poids de m est $P_T = \frac{GM_T m}{r_T^2}$

Par rapport à la lune, le poids de m est $P_L = \frac{GM_L m}{r_L^2}$

Pour $P_L = P_T \Leftrightarrow \frac{GM_T m}{r_T^2} = \frac{GM_L m}{r_L^2} \Leftrightarrow \frac{M_T}{r_T^2} = \frac{M_L}{r_L^2}$ d'où : $r_T = r\frac{\sqrt{M_T / M_L}}{1+\sqrt{M_T / M_L}}$

A.N. : r_T = 3,51 10^5 Km

7/ La tension $\vec{F}$ et le poids $\vec{P}$ n'ont pas de composantes horizontales. Comme on est devant un problème de statique, la somme de toutes les forces doit être nulle. Par conséquent la force $\vec{R}$ est elle aussi portée par la verticale.

Les conditions d'équilibre sont données par :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{T} + \vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{P} + \vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{R} = \vec{0}$$

Le choix du point O est arbitraire. On peut le prendre confondu avec l'un des 3 points d'application des forces citées ci-dessus. Par exemple, choisissons le point confondu avec le pivot.

Soit r, f et p les points d'applications respectivement des forces $\vec{R}$, $\vec{F}$ et $\vec{P}$.

$\vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{F} = \vec{Of} \wedge \vec{F}$; $\vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{P} = \vec{Op} \wedge \vec{P}$ et $\vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{R} = \vec{or} \wedge \vec{R} = \vec{0}$ (o et r sont confondus)

$\left|\vec{Of}\right| = 0,03m$ et $\left|\vec{Op}\right| = 0,35m$

Soit un repère OXYZ tel que OZ soit perpendiculaire au plan OXY. OZ porte un vecteur unitaire $\vec{k}$ avec $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$

Projetons les relations vectorielles ci-dessus :

$$\text{(i)}\ -P\,\vec{j} - R\,\vec{j} + F\,\vec{j} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow -P - R + F = 0$$

$$\text{(ii)}\ -0,35P + 0,03F = 0 \quad \Leftrightarrow\ F = 11.67P$$

A.N. : F = 583 N et R = 533 N

8/ i) Appliquons la 2ème loi de Newton au feu rouge: $\vec{P}+\vec{T_3} = m\,\vec{a}$ .Or a = 0, d'où : $P = T_3$
A.N. T_3= 125 N.
ii) Appliquons la 2ème loi de Newton au nœud (point de rencontre des 3 tensions) : $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T_3} = \vec{0}$

En projetant sur un système d'axes OXY orthonormés, on obtient :

$$T_1 \sin 37° + T_2 \sin 53° - T_3 = 0$$
$$-T_1 \cos 37° + T_2 \cos 53° = 0$$

A.N. : T_1 = 100 N et T_2 = 75 N

9/ Les équations d'équilibre pour un corps rigide sont : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P}+\vec{R}+\vec{N} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0}$
Par projection sur un système d'axes OXY, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow F\sin\alpha - R\sin\beta = 0 \quad \text{et} \quad F\cos\alpha - R\cos\beta + N = 0$$

$$\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0} \Leftrightarrow d_2 F\cos\alpha - d_1 N = 0$$

10/ Le volume de la feuille d'or est V= 100 10^{-4} x 10 10^{-3}= 10^{-4} m^3.
La masse volumique de l'or est ρ=densité x 1000 Kg/m^3=19300 Kg/m^3
Par conséquent, la masse de la feuille d'or est m= ρ V
A.N. : m= 1.93 Kg

11/ m= ρ_{GR} V= $\rho_{GR}\, \frac{4}{3}\pi R^3$ **A.N. :** m= 1300 x $\frac{4}{3}\pi$ (2 10^{-6}) ^{3}= 4.36 10^{-14} Kg

12/ $\frac{F}{m} = a$ A.N. : $a = \frac{2 10^5}{60} = 3333$ m/s^2
Et $a = 340\,g$ avec $g = 9.8$ m/s^2

13/ a- Appliquons la 2ème loi de Newton à m_1. Comme le bloc se déplace sur la surface horizontale, il ne possède pas alors d'accélération verticale a_y=0

Par projection sur un système d'axes OXY, on obtient :

$$N_1 - W_1 = 0 \quad (1) \text{ et } \quad T = m_1 a_x = m_1 a \quad (2)$$

T et a sont des inconnues

$N_1 = W_1 = m_1 g$ **A.N. :** $N_1 = W_1 = 19.8$ N

Appliquons la 2ème loi de Newton à m_2. Comme le bloc se déplace suivant la verticale, il ne possède pas alors d'accélération horizontale a_x=0. De la même façon, on obtient :

$$-T + m_2 g = m_2 a_y = m_2 a \quad (3)$$

L'absence de frottement conduit à prendre la même tension T des 2 cotés de la poulie et par conséquent la même accélération a.

Comme $a = T/m_1$, (3) devient : $-T + m_2 g = m_2 (T/m_1)$

D'où : $T = m_2 m_1 g/(m_2+m_1)$

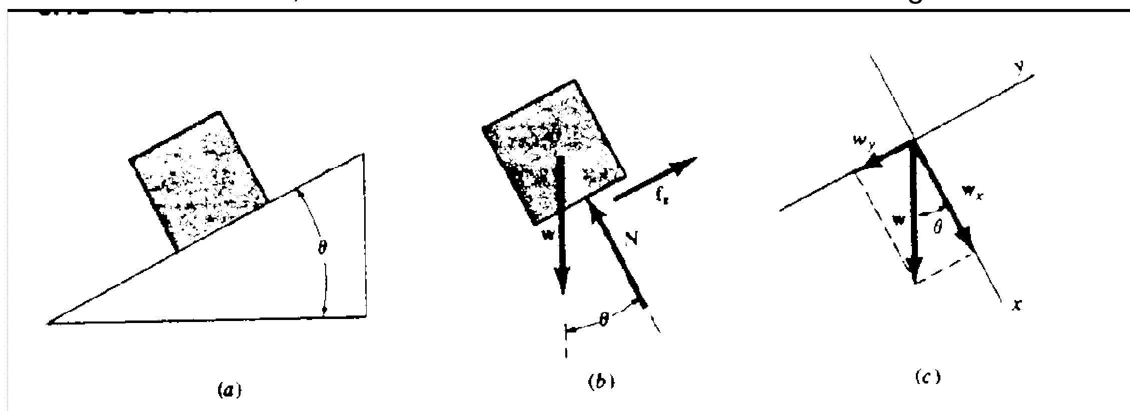
A.N. : T= 65.33 N

b- $a = T/m_1$ **A.N. :** $a = 3.27$ m/s^2

c- Comme le mouvement est uniformément accéléré (a est une constante positive) et que le système st initialement au repos, alors :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 \qquad \textbf{A.N. :} \ \Delta x = 6.54 \text{ m}$$

14/ Dans cet exercice, on choisira les axes comme le montre la figure ci-dessous.



Le poids W (ou P) a pour composantes :
$W_x = P_x = W\cos\theta = P\cos\theta$ **et** $W_y = P_y = -W\sin\theta = -P\sin\theta$

Si le bloc reste fixe la force de frottement statique $f_s = P\sin\theta$
La réaction du support N est égale $P\cos\theta$, d'où $tg\theta = f_s/N$
Quand le bloc commence à glisser, on a : $f_s = f_{s,max} = \mu_s N$, par conséquent :

$$\mu_s = tg\theta_{max}$$

Le dispositif présenté dans cet exercice permet de mesurer de façon simple le coefficient de frottement statique. En effet, il suffit de faire varier progressivement θ jusqu'à ce que le bloc commence à bouger.

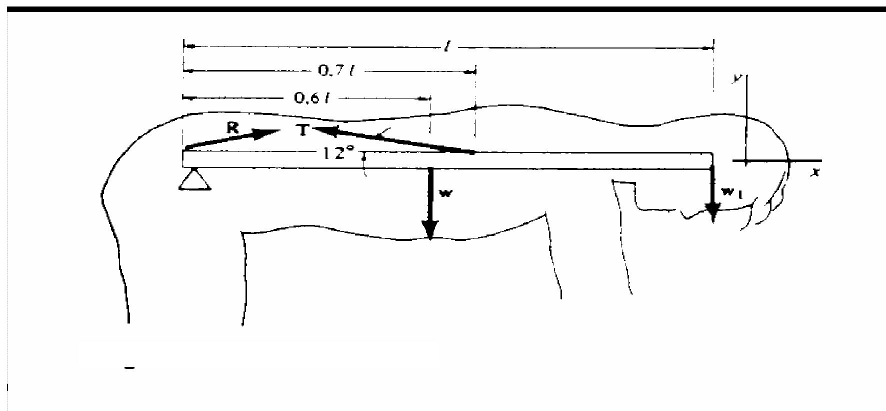
15/ On a : $f_s = \mu_s N = \mu_s mg$ **A.N.:** $f_s = 30$ N

16/ On applique les 2 relations de la statique: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0}$
On obtient dans ce cas: $F_1 - F_2 - F = 0$
Si on choisit de déterminer les moments par rapport au point d'application de la force F, alors :

$$0.01\,F_1 - 0.03\,F_2 = 0 \Leftrightarrow F_1 = 3\,F_2$$

A.N. : $F_1 = 0.75$ N et $F_2 = 0.25$ N

17/ C'est un problème de statique : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0}$



Projetons les forces sur le système d'axes OXY.

$$R_x - T\cos 12° = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$-W_1 + R_y + T\sin 12° - W = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Déterminons les moments par rapport au point d'application r de la force R :

$\vec{M}_{/r}\,\vec{R} = \vec{rr} \wedge \vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_{/r}\,\vec{W} = \vec{rw} \wedge \vec{W}$

$\vec{M}_{/r}\,\vec{W}_1 = \vec{rw_1} \wedge \vec{W}_1$ et $\vec{M}_{/r}\,\vec{T} = \vec{rt} \wedge \vec{T} = \vec{rt} \wedge \vec{T}_y$

On obtient alors : $0.6\ W - 0.7\ T \sin 12° + W_1 = 0$ **(3)**

a- A.N. : Cas où $W_1 = 0$: $R_y = 70$ N, $R_x = 1976$ N et T = 2020 N

b- A.N. : Cas où $W_1 = 175$ N : $R_y = -5$ N, $R_x = 3153$ N et T = 3223 N Comme R_y est négative, la force R est dirigée vers l'extérieur du dos.

Corrigé de la série n°3
Mouvements circulaire et oscillatoire

1/ $\omega_0 = 3700$ tours/min = (3700 x 2π)/60 rad/s = 387 rad/s

a- $V = r\omega$ **A.N.:** V = 97 m/s

b- On a: $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,\Delta\theta$ et $\alpha t = \omega - \omega_0$ d'où: $\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)\,t$

AN: $\omega = 0$ rad/s et t = 3 s d'où: $\Delta\theta = 581$ rad

Le nombre de tours est $N = \Delta\theta/2\pi$ **AN :** N = 581/2π = 92,47

2/ Le volume d'une sphère est $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Le poids P est donné par $P = m\,g = \rho\,\mathcal{V}\,g = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3\,g$

A.N. : $P = 4{,}4\ 10^{-13}$ N

Quant à la force centrifuge F_C, elle est donnée par : $F_C = m\,\omega^2 r = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3\,\omega^2 r$

AN : $F_C = 4{,}8\ 10^{-9}$ N

On voit que F_C est très grande devant P : $F_C = 10^4$ P.

Sous l'effet de F_C, la sédimentation sera rapide: C'est l'intérêt des centrifugeuses.

3/ a- La force électrostatique (force exercée par le proton sur l'électron) vaut :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-e^2}{r^2}\,\frac{\vec{OM}}{\left|\vec{OM}\right|}$$

Où O est le centre du repère confondu avec le proton et r est la distance qui sépare l'électron du proton.

La même force est exercée par l'électron sur le proton (3 ème loi de Newton).

AN : $\left|\vec{F}\right| = 8{,}2\ 10^{-8}$ N

Quant à la force gravitationnelle exercée par le proton sur l'électron, elle vaut :

$$\vec{F}_G = \frac{-GMm}{r^2}\,\frac{\vec{OM}}{\left|\vec{OM}\right|}$$

AN : $\left|\vec{F}_G\right| = 3{,}6\ 10^{-47}$ N

$\left|\vec{F}_G\right| << \left|\vec{F}\right|$: En physique de l'atome, on négligera toujours la force gravitationnelle devant la force électrostatique.

b- L'application de la 2 ème loi de Newton nous donne :

$$F = m a \Rightarrow a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}^2}{r^2}\frac{1}{m}\frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}$$

L'accélération est dirigée vers O : elle est donc centripète (ou radiale) $\vec{a} // \vec{OM}$.

AN : a = 9 10^{22} m/s^2.

Le mouvement est circulaire uniforme : a = $\frac{V^2}{r}$ où V est la vitesse de l'électron.

AN : V = 2,2 10^6 m/s.

Quant à la fréquence f, elle est donnée par : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{V}{2\pi r}$

AN : f = 6,6 10^{15} Hz.

4/ Une charge q de vitesse $\vec{V}$ placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ sera soumise à la force de Laplace: $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$

Dans cet exercice $\vec{V} \perp \vec{B}$: $|\vec{V} \times \vec{B}| = VB$

L'ion décrit un arc de cercle à vitesse constante : l'accélération est centripète et vaut $\frac{V^2}{r}$ avec $r = \frac{d}{2}$

Par application de la 2 ème loi de Newton, on obtient :

$$qVB = M\frac{V^2}{r} = 2M\frac{V^2}{d} \Rightarrow M = \frac{qBr}{V}$$

AN. : M = 6,7 10^{-27} Kg = 4 M_P (M_P masse du proton)

La masse de l'ion (de charge ++) M est égale à 4 fois la masse du proton. L'ion est l'Hélium doublement ionisé H_e^{++} : C'est la particule α.

5/ Soit O le centre de la terre, m la masse du satellite et r=OM : distance entre le satellite et le centre de la terre.

r= h+R_T où R_T est le rayon de la terre et h l'altitude

a- Par application de la deuxième loi de Newton : ma= G M_T/r^2

b- à r=cte, l'accélération est constante

On a V2/r = G M_T/r^2 d'où V(r) = G M_T/r

c- V=r ω et T=2π/ω d'où T^2=C r^3 avec C= 4π^2/GM_T

C'est la troisième loi de Kepler.

d- r = h+R_T $\Rightarrow$ h= - R_T+ (GM_T T^2/4π^2)$^{1/3}$

A.N.: h= 35775 Km

6/ Pour voir le soleil fixe à l'horizon, il faut que l'avion ait une vitesse angulaire égale à celle de la terre mais de sens opposé.

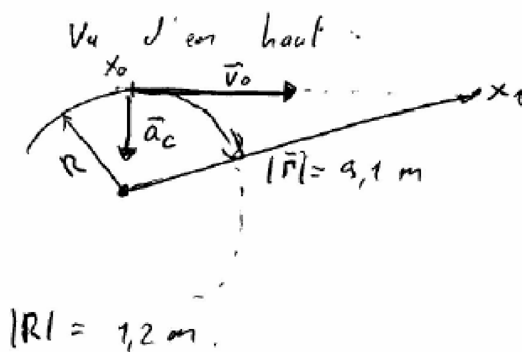
$\omega_{Terre} = \frac{2\pi}{T}$ où $T = 24 h$

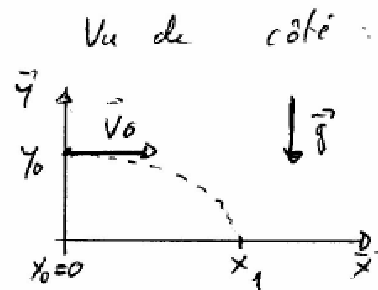
Quant à la vitesse linéaire, elle est donnée par : $V = r\,\omega_{Terre} = r\,\frac{2\pi}{T} = (R_T + h)\frac{2\pi}{T}$

R_T est le rayon de la terre et h est l'altitude

A.N. : $V = 465.8\, m/s = 1677\, km/h$

7/





$x_1 = \sqrt{9,1^2 - 1,2^2} = 9,02\ m$

$y_0 = 1,8\ m$.

Suivant OY : $y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$

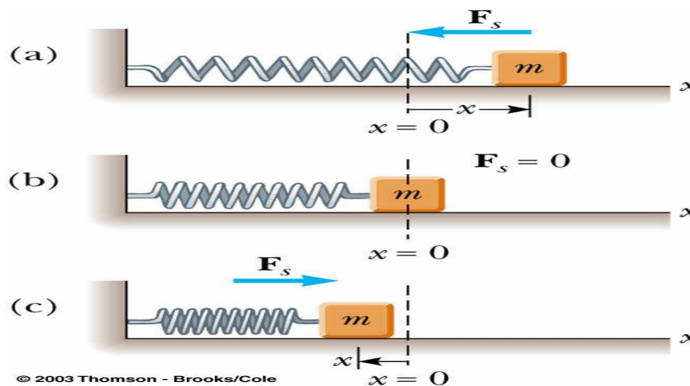
Lorsque la pierre touche le sol, $y(t) = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} g t^2$ **A.N. :** t = 0.61s

Suivant OX : $x(t) = V_x t$

A t = 0.61 s : $V_x = \frac{9.1}{0.61} = 14.92\, m/s$

L'accélération centripète vaut : $a_c = \frac{V^2}{R}$ **A.N. :** $a_c = 185.5\ m/s^2$

8/ Equation d'une masse m accrochée à un ressort horizontal



En l'absence de frottement, le poids de m est compensé par la réaction du support. Il reste la force de rappel du ressort.

Comme en cours : $-k\,x + m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$

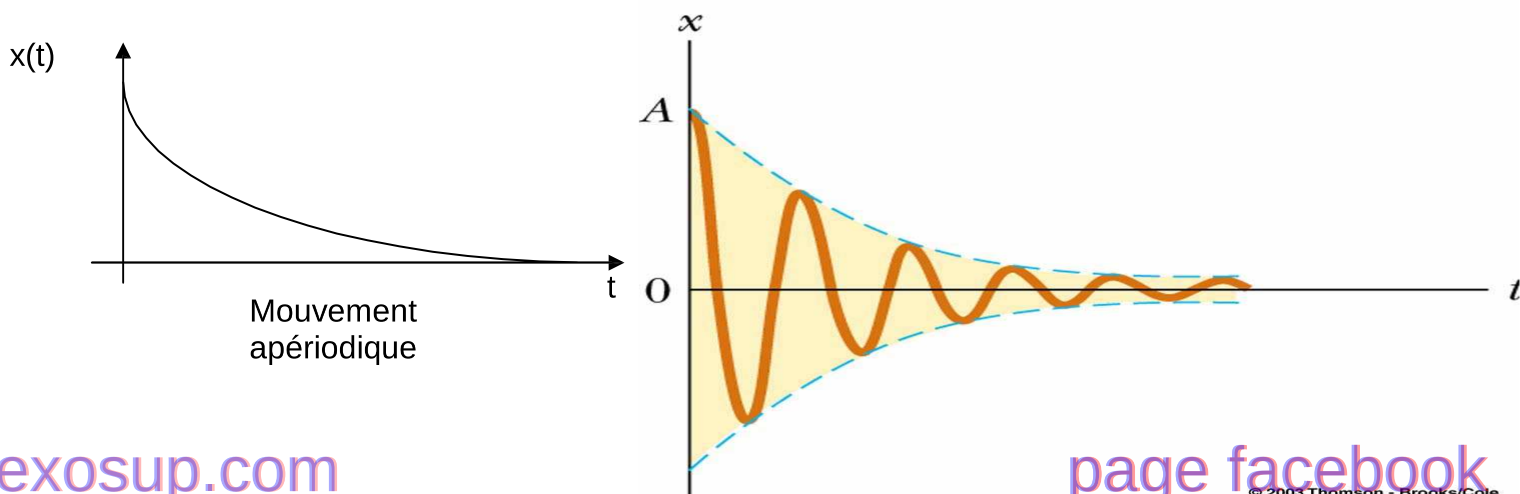
C'est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

9/ Mouvement oscillatoire amorti

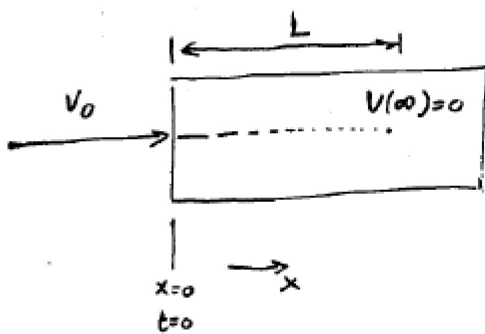
Le mouvement harmonique simple est un cas idéal. En effet, les forces de frottement interviennent pour amortir les oscillations.
L'amplitude de l'oscillation baisse plus ou moins rapidement jusqu'à s'annuler, sauf si on applique une force pour compenser les pertes causées par les frottements qui sont des forces dissipatives. Ces dernières notées F_d sont généralement proportionnelles à la vitesse $\vec{V}$: $\vec{F}_d = -\lambda\,\vec{V}$
Où λ est une constante positive appelée coefficient d'amortissement.

A une dimension : $F = -\lambda\,\dot{x}$

La 2ème loi de Newton devient : $-k\,x - \lambda\,\dot{x} = m\,\ddot{x}$
C'est une équation différentielle du 2ème ordre linéaire, à coefficient constants et sans second membre.
Si le frottement est très important, l'amplitude s'annule très vite : c'est le mouvement apériodique. Dans le cas contraire, on obtient un mouvement pseudo-périodique ayant une pseudo-période T = T0/ ?.



10/



On a : $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\lambda v = m\dfrac{dv}{dt}$

A une dimension : $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{\lambda}{m}dt$

Par intégration et en tenant compte du fait que $v=v_0$ à $t=0$: La vitesse dans un milieu visqueux est donnée par : $V(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$ avec $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$

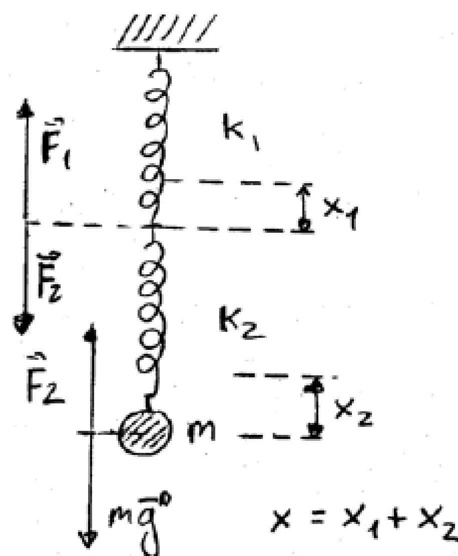
Déterminons la distance parcourue après un temps infini :

$L = \int_0^{\infty} V(t)dt = V_0\int_0^{\infty} \exp(-t/\tau) = V_0\tau$

Or $L = V_0\tau = V_0\dfrac{m}{\lambda}$ **A.N. :** L = 5 cm

11/

<u>Cas n°1</u> :



A l'équillibre: $\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$

$K_1x_1 = F_1$ et $K_2x_2 = F_2 = mg$ D'où : $F_1 = mg$

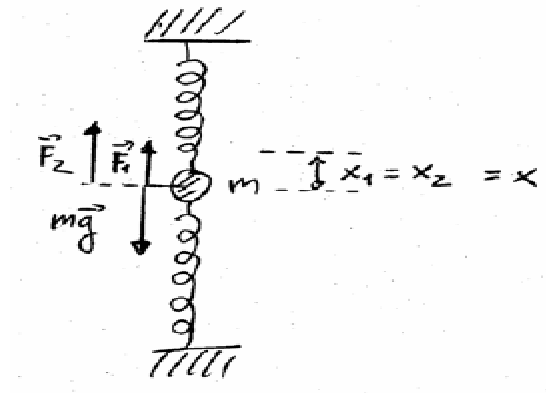
En combinant les équations, on obtient : $x_1 + x_2 = mg\dfrac{k_1 + k_2}{k_1k_2}$

Si on remplace $x_1 + x_2 = x$ et $k = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$, on peut écrire : $kx + mg = 0$

Hors équilibre, on a : $\dfrac{k}{m}x + \ddot{x} = 0$: c'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}} \quad \text{et de fréquence } \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}}$$

Cas n°2 :



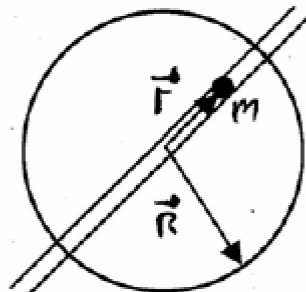
A l'équillibre: $\vec F_1 + \vec F_2 = -m\vec g$ ou $F_1 + F_2 = mg$

Or $x_1 = x_2 = x$, d'où : $x_1 = \dfrac{mg}{k_1 + k_2}$ d'où : $(k_1 + k_2)x + mg = 0$

Hors équilibre, on a : $\dfrac{k_1 + k_2}{m}x + \ddot{x} = 0$: C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad \text{et de fréquence } \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

12/



On $F = m a$ où $a = \frac{GM_T(r)}{r^2}$

$M_T(r)$ étant la masse de la terre quand l'objet est à une distance r inférieure à R_T rayon de la terre.

Or $M_T(r) = \frac{M_T r^3}{R^3}$ d'où : $a = \frac{GM_T r}{R^3}$

L'équation du mouvement est alors donnée par : $m\frac{d^2r}{dt^2} = m\frac{GM_T r}{R^3}$

$\Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = kr$ où $k = \frac{GM_T}{R^3}$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$

Comme $g_0 = \frac{GM_T}{R^2}$ est l'accélération de la pesanteur à la surface terrestre, on peut écrire : $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$ **A.N. :** T= 5075 s = 1 h 24 min 35 s

13/ Pour chaque masse, on a : $m a = F$ avec $F = - k d$



Posons : $x_2 - x_1 = d$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = +k d \qquad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = - k d \qquad (2)$$

(2) x m_1 - (1) x m_2

$$m_1 m_2 \left[\frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2}\right] = - k d(m_1 + m_2)$$

™

$$\frac{d^2 d}{} \quad m + m$$

dt^2

$= \updownarrow k\, d \frac{1 \qquad 2}{}$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ⎤=

∝ est appelée masse réduite

Corrigé de la série n°4
Travail et énergie

1/ Fait en cours et disponible sur internet (chap.4)

2/
W = N m g h : Ce travail va servir à brûler une masse M de graisse.
Or $E_{méc} = 0.2$ E où E = 3.8 10^6 J par kg
M = W/ $E_{méc}$ **A.N. :** M = 6.3 g

3/ $E_P = -\int F(x)dx = \int Kx\,dx = \frac{1}{2}Kx^2 + Cte$

L'énergie potentielle étant nulle pour x = 0 (la position d'équilibre): la constante est alors nulle. Il reste : $E_P = \frac{1}{2}K\,A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

L'énergie cinétique est $E_C = \frac{1}{2}m\ddot{x}^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$, Or $\omega^2 = \frac{K}{m}$ d'où :

$$E_C = \frac{1}{2}K\,A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

L'énergie mécanique **-** $E_m = E_c + E_P = \frac{1}{2}KA^2 > 0$

L'énergie mécanique est bien conservative.

Application: $E_P = \frac{1}{2}K\,x^2$ **AN :** $E_P = \frac{1}{2}$ (800 x $0,5^2$) = 100 J

4/ La force électrostatique est donnée par :

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-e^2}{r^2}\frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}$$

Comme le mouvement est circulaire uniforme, alors $\vec{a} = \frac{-V^2}{r}\frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}$

a- L'énergie cinétique E_c est donnée par $E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$

b- L'énergie potentielle est donnée par $E_P = -\int F(r)dr = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}dr = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$ + Cte

L'énergie potentielle étant nulle à l'infini: $E_P = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$

c- $E_m = E_c + E_P = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$: L'énergie mécanique est négative. Elle est bien conservative sur cette orbite circulaire de rayon r.

5/

a- La masse de l'air est donnée par : $m = \rho V = \rho S x = \rho \pi r^2 V t$

S est la section d'une pale. t est le temps durant lequel le vent traverse la pale à la vitesse V.

b- $E_C = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \rho S^2 V^3 t$

c- L'énergie électrique obtenue est E = 0,3 E_C et la puissance électrique produite vaut :

$$\mathcal{P} = \frac{E}{t} = 0,3 \frac{1}{2} \rho \pi S^2 V^3$$

On remarque que $\mathcal{P}$ dépend fortement de la vitesse du vent.

AN : $\mathcal{P}$ = 5400 W C'est une puissance suffisante pour 3 à 4 habitations moyennes.

6/ On choisira le bas de la colline comme référence.

a- $mg H = \frac{1}{2} mV^2 \Leftrightarrow V = \sqrt{2gH}$ **AN:** V = 19,8 m/s

b- $\frac{1}{2} mV^2 = mg H + W_d \Leftrightarrow W_d = \frac{1}{2} mV^2 - mg H$ **AN:** W_d = - 7300 J

c- Puisque le terrain est plat, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle. Toute l'énergie cinétique de la skieuse doit être dissipée.
La réaction normale n est égale et opposée au poids. En conséquence le travail total se réduit à celui de la force de frottement cinétique f_c :

$$W_{f\,c} = - \mu_C \, mg \, d$$

Comme la vitesse finale est nulle, on a : $0 - \frac{1}{2} mV^2 = - \mu_C \, mg \, d$

A.N.: Si V = 19,8 m/s, d = 8 m
Si V = 10,0 m/s, d = 2 m

7/ Le travail total pour vaincre la force de pesanteur est W = N Mg h
N est le nombre de fois qu'il faut soulever le poids de masse M d'une hauteur h.
Comme un kg de graisse fournit une énergie de 3,8 10^7 J et que cette dernière est convertie en énergie mécanique avec un rendement de 20 %, alors :
Pour une masse m de graisse : E = 0,2 m 3,8 10^7 J.

Or E = W $\Leftrightarrow$ N = 0,2 m 3,8 10^7/ Mg h **AN :** N = 5428

8/

Compléments du cours :
Considérons une roue de rayon r tournant autour d'un axe Δ fixe.
Quand la roue tourne d'un angle θ, un point de la jante effectue un déplacement valant r dθ.
Une force F agissant tangentiellement à la roue au cours de déplacement effectuera un travail $dW = F \, r \, d\theta$ et la puissance est donnée par $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = F \, r \, \omega$

Quant à l'énergie cinétique d'un objet de masse m en mouvement de rotation, elle est donnée par: $E_C = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

Résolution de l'exercice 8 : Prenons comme hauteur de référence pour E_P la surface de l'eau.
Au sommet E_C est nulle.

$$E_C \text{ totale} = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} I \frac{V^2}{r^2}$$

Comme l'énergie mécanique est conservée : $\frac{1}{2}m V^2 + \frac{1}{2}I\frac{V^2}{r^2} = mg\,h$ ou encore :

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mr^2}}}$$

AN : $V = 12{,}5$ m/s

Remarque : Si le sceau n'était pas relié au treuil, il aurait acquis une vitesse plus grande.

9/ Par analogie avec l'ex. 13 de la série n°2, on a :

$$a = 2\Delta x\,\frac{g(-m_1 \sin 37 + m_2}{m_1 + m_2} = cte$$

On utilisera aussi $V_f^2 - V_i^2 = 2a\,\Delta x$

$V_f = V_A = V_B = 1.51\,m/s$

10/ Donnée manquante : $k = 800$ N/m

a) On a $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mV^2$

$V = 0.8$ m/s

b) $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mV^2 = mg\,h = mg\,d\,\sin 25$

$d = 7.7$ cm

11/

a) On a : $\frac{1}{2}k\,x^2 = mg\,h$ **A.N.:** $k = 69688$ N/m

b) $a_{max} = x_{max}\,\omega^2$ (vue en cours) **A.N.:** $a_{max} = 52266\ m/s^2$

12/ $P = M_{tot}\, g\, h / t$ **A.N. :** P = 41 kW =55.6 hp

13/ On a la puissance = W/ t = m g h /t

D'où m/t = puissance / g h= 50 000000/ 9,8 x 75 = 68027 Kg/s

Or 1 000 Kg d'eau est équivalente à 1 000 l= 1 m^3. D'où le débit Q = 68 m^3/s

Corrigé de la série n°5
Mécanique des fluides non visqueux

1/ Soient V_S le volume de l'iceberg immergé dans l'eau et V le volume total de l'iceberg.
La poussé d'Archimède P_A sera donnée par:

$$P_A = \rho_{eau\ de\ mer}\, V_S\, g$$

L'iceberg est en équilibre $\Rightarrow P_A = P \Rightarrow \rho_{eau\ de\ mer}\, V_S\, g = mg = \rho_{glace}\, V g \Rightarrow \frac{V_S}{V} = \frac{\rho_{glace}}{\rho_{eau\ de\ mer}}$

A.N.: $\frac{V_S}{V} = \frac{920}{1025} = 0.90$: L'iceberg est immergé dans l'eau de mer à 90 %.

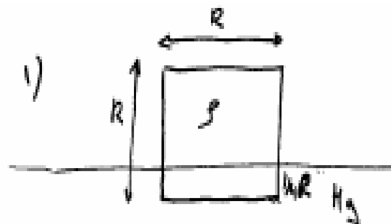
2/ Soient V_S le volume de la bûche immergé dans l'eau et V le volume total de la bûche
La poussé d'Archimède P_A sera donnée par:

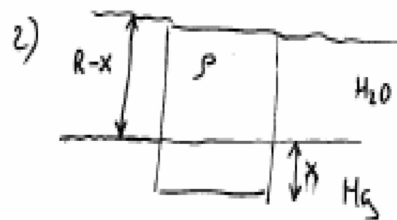
$$P_A = \rho_{eau\ de\ mer}\, V_S\, g$$

La bûche est en équilibre $\Rightarrow P_A = P \Rightarrow \rho_{eau\ de\ mer}\, V_S\, g = mg = \rho_{bûche}\, V g \Rightarrow \frac{V_S}{V} = \frac{\rho_{buche}}{\rho_{eau\ de\ mer}}$

A.N.: $\frac{V_S}{V} = \frac{800}{1000} = 0.8$: La bûche est immergée dans l'eau de la rivière à 80 %.

3/ le volume du cube est $V = R^3$.
On a : $R^3 \rho\, g = \frac{1}{4} R^3 \rho_{Hg}\, g$ (1) et $R^3 \rho\, g = R^2 .x .\rho_{Hg}\, g + (R-x) R^2 \rho_{eau}\, g$ (2)





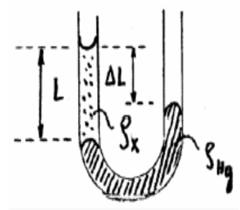
En combinant (1) et (2), on obtient :

$$\frac{x}{R} = \left[\frac{1}{4}\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{eau}} - 1\right]\frac{1}{\left[\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{eau}} - 1\right]}$$

A.N. : $\frac{x}{R} = 19\%$

4/ On a : $P = P_0 + \rangle g d$ où P_0 est la pression atmosphérique **A.N. :** P= 1.06 atm

5/ La pression est identique à la même profondeur.



$P_{atm} + \rho_{Hg}\; g\,(L - \Delta L) = P_{atm} + \rho_x\, g\, L \;\Rightarrow\; \rho_{Hg}\,(1 - \frac{\Delta L}{L}) = \rho_x$ **A.N. :** $\rho_x = 952\, kg/m^3$

6/ A 40 m de profondeur, la pression sur le corps du sub est donné par: $P = P_{atm} + \rho_{eau} h g \approx 5\, atm$.
Pour respirer l'air de la bouteille par exemple, il a besoin de compenser la pression externe, et il aura de l'air dans les poumons à une pression de $5\, atm$.
S'il remonte avec cet air dans les poumons, il se retrouvera en surface avec une pression externe de $1\, atm$. Ainsi, l'air dans les poumons à $5\, atm$ cherchera à s'évacuer. Ceci est très dangereux car il peut causer un pneumothorax ou encore une embolie gazeuse.
Pneumothorax : épanchement de gaz dans la cavité pleurale
Embolie gazeuse : obstruction des vaisseaux par des bulles de gaz 'surtout l'azote) accompagnant une brusque décompression de l'air respiré ou pénétrant par une plaie d'un vaisseau.

7/ La variation de pression due à la profondeur h s'exprime par $\Delta P = \rho_{eau}(h + 0.3) g$.
Avec une détente maximale, les poumons sont capables de générer une différence de pression égale à 86 mm Hg.
D'où la profondeur maximale h_{max} est donnée par : $h_{max} + 0.3 = \frac{\Delta P}{\rho g}$ **A.N. :** $h_{max} = 0.87 m$
En fait h représente la limite supérieure de profondeur. Pour être sûr de respirer, il faut prendre la moitié de cette profondeur : $h_{max} = 0.44 m$

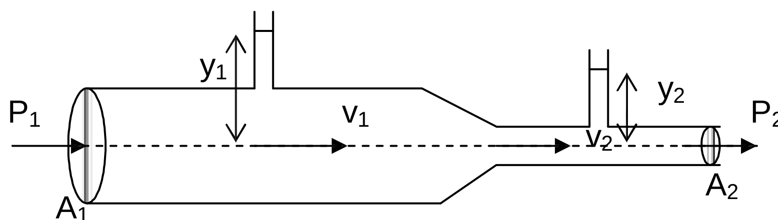
8/ - Le débit $= Q = \frac{volume}{temps} = \frac{masse}{\rho_{pétrole}\, temps}$ **A.N. :** $Q = \frac{125\, 10^3}{24 \times 800 \times 3600} = 0.0018\, m^3/s$

$Q = A\, v$ avec $A = \pi r^2$, d'où $v = \frac{Q}{\pi r^2}$ **A.N. :** $v = 1{,}43\; 10^{-4} m/s$

$P = P_{atm} + \rho_{eau\ de\ mer}\, g\, h$ **A.N. :** $P = 1.013\, 10^5 + (10^3\; 9.81\; 3000) = 295.3\, 10^5\ Pa$

9/ La pression de jauge est donnée par $P - P_{atm}$ où P est la pression du fluide au rez-de-chaussée et
$P - P_{atm} = \rho g h$ **A.N. :** $h = 30.6\, m$

10/
On a montré dans le cours (tube de Venturi) que :



$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1)}}$$

A.N.: $v_1 = 0.125\, m/s$

11/ On a:

$Q = \frac{V}{t}$ **A.N.:** $Q = \frac{65\,10^{-3}}{0.13} = 0.5\,m^3/s$

$Q = Av \Rightarrow v = \frac{Q}{A}$ **A.N.:** $v = 1\,m/s$

12/ Fait en cours

13/ Pour calculer le débit Q, on calculera d'abord la vitesse de l'eau en bas du barrage.

$v = \sqrt{2g(h - h_1)}$ **A.N. :** $v = 43.7\,m/s$

Et $Q = Av = \pi r^2 v$ **A.N. :** $Q = 858.8\,m^3/s$

La puissance est donnée par : $P = \frac{E_{cin}}{t} = \frac{1}{2}\frac{\rho V v^2}{t} = \frac{1}{2}\rho v^2 . Q$ **A.N. :** $P = 819\,MW$

Corrigé de la série n°6
Mécanique des fluides visqueux

I/

a- $Q = Av_{moy} \Leftrightarrow v_{moy} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$ **A.N. :** $v_{moy} = \frac{0.01}{\pi\ 4 10^{-4}} = 7.96\ m/s$

b- Le nombre de Reynolds est donné par : $N_R = \frac{2R\ \rho v_{moy}}{\eta}$

A.N. : N_R= 316815 > 3000 : l'écoulement est turbulent.

II/ L'écoulement est laminaire si $N_R \leq 2000 \Leftrightarrow \frac{2R\ \rho v_{moy}}{\eta} \leq 2000 \Leftrightarrow v_{moy} \leq 2000 \frac{\eta}{2R\ \rho}$

A.N. : $v_{moy} \leq 098\ m/s$

Le débit est $Q = Av_{moy} = \pi r^2 v_{moy}$ **A.N. :** $Q = 123 10^{-5}\ m^3/s$

III/

a- $Q = Av_{moy} \Leftrightarrow v_{moy} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$ **A.N. :** $v_{moy} = \frac{0.001}{\pi\ 16 10^{-6}} = 1.99 10^{-2}\ m/s$

b- $\Delta P = \frac{8v_{moy}\ \eta\ l}{R^2}$ (loi de Poiseuille) **A.N. :** $\Delta P = 2.1 Pa$

c- la puissance st donnée par $\mathcal{P} = \Delta P\ v_{moy}\ \pi\ R^2$ **A.N. :** $\mathcal{P} = 2.1\ \mu W$

La puissance nécessaire pour pomper le sang à travers cette artère est très faible devant le métabolisme (qui est de $10\ W$)

IV- On a 3 forces :
Le poids, la poussée d'Archimède et la force de frottement visqueux.
Pour avoir une vitesse limite, il faut que la somme vectorielle des 3 forces soit nulle.
D'où après projection sur un axe descendant:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{acier} g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{air} g + 6\pi R \eta_{air} v_{lim}$$

A.N. : $v_{lim} \approx 10^6 m/s$. Ce résultat n'a aucune signification physique car la vitesse de la boule est une vitesse relativiste $(\approx \frac{1}{100} c)$.

On travaillera alors en régime turbulent où la force de frottement visqueux est donnée par :

$$F = \frac{1}{2} A \pi R^2 \rho_{air} v^2$$

Dans ce cas, on obtient : $v_{lim} = \sqrt{\frac{8Rg}{3A\rho_{air}}}$

A.N. : $v_{lim} \approx 267 m\ /s$.

VI/ Loi de Poiseuille $\Delta P = \dfrac{8 v_{moy} \eta l}{R^2} \Leftrightarrow v_{moy} = \dfrac{\Delta P R^2}{8 \eta l}$ **A.N. :** $v_{moy} = 1.83\ m/s$

VII/ Pour un écoulement laminaire, la résistance à l'écoulement est donnée par : $R_f = \dfrac{8 \eta l}{\pi R^4}$

A.N. : $R_f = 37162\ Pa.s/m^3$

On a $R_f = \dfrac{\Delta P}{Q} \Leftrightarrow \Delta P = R_f Q$ **A.N.:** $\Delta P = 3.72\ Pa$

Cette valeur est très faible par comparaison à la perte de charge totale du système cardiovasculaire qui est de l'ordre de 13.3 kPa. La majeur partie des résistances vasculaires et des pertes de charge se produit dans les artères de petit calibre (artères terminales, capillaires ...)

VII/

1- $Q = A v_{moy} = \pi r^2 v_{moy}$ **A.N. :** $Q = 2.53\ 10^{-5}\ m^3/s$

2- $N_R = \dfrac{2R \rho v_{moy}}{\eta}$ **A.N. :** $N_R = 3418$

$N_R \succ 3000$: l'écoulement est turbulent

3- $\Delta P = \dfrac{8 v_{moy} \eta l}{R^2}$ **A.N. :** $\Delta P = 344\ Pa$